Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

13-2 | 2009
Varia

Le concept d'espace chez Veronese

Une comparaison avec la conception de Helmholtz et Poincaré

Paola Cantù

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/299
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.299
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 1 octobre 2009
Pagination : 129-149
ISBN : 978-2-84174-504-3
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Paola Cantù, « Le concept d'espace chez Veronese », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 13-2 | 2009, mis en ligne le 01 octobre 2012, consulté le 01 mai 2019. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/299 ; DOI : 10.4000/philosophiascientiae.299

Le concept d'espace chez Veronese. Une comparaison avec la conception de Helmholtz et Poincaré

Paola Cantù

Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie,
Archives Henri Poincaré, Nancy-Université

Résumé : Giuseppe Veronese (1854-1917) est connu pour ses études sur les espaces à plusieurs dimensions ; moins connus sont les écrits « philosophiques », qui concernent les fondements de la géométrie et des mathématiques et qui expliquent les raisons pour la construction d'une géométrie non-archimédienne (une dizaine d'années avant David Hilbert) et la formulation d'un concept de continu, qui contient des éléments infinis et infiniment petits. L'article esquissera quelques traits saillants de son épistémologie et analysera le rapport entre géométrie et intuition spatiale, en comparant les conceptions de l'espace géométrique dans les œuvres de Veronese, Helmholtz et Poincaré. Selon Veronese l'espace intuitif, de même que l'espace géométrique, n'est pas euclidien et il n'a pas un nombre déterminé de dimensions : on peut donc avoir l'intuition aussi bien d'un espace à quatre dimensions que d'un continu non-archimédien.

Abstract: Giuseppe Veronese is known for his studies on spaces with more dimensions; less known are his "philosophical" writings, that concern the foundations of geometry and mathematics and explain the reasons for constructing a non-Archimedean geometry (several years before David Hilbert's *Grundlagen*) and the formulation of a concept of continuity that admits infinitely big and small quantities. After sketching some relevant aspects of Veronese's epistemology, the article will analyse the relation between geometry and spatial intuition by a comparison of Veronese's, Helmholtz's and Poincaré's conceptions of the geometrical space. According to Veronese, the representational space, and the geometrical space as well, are not Euclidean nor have a definite number of dimensions: that is why one can represent himself a space with four dimensions and even a non-Archimedean continuum.

---

1 Introduction [1]

Veronese le premier a construit une géométrie non-archimédienne (une dizaine d'années avant David Hilbert et avec une méthode synthétique plutôt qu'analytique) et il a développé un concept de continu, qui contient des éléments infinis et infiniment petits. Veronese est très connu chez les mathématiciens pour ses études sur les espaces à plusieurs dimensions en utilisant la méthode par projections et sections de Luigi Cremona. Moins connus sont les écrits « philosophiques » qui concernent les fondements de la géométrie et des mathématiques et les traits les plus saillants de la conception épistémologique de Veronese.

L'article analysera le rapport entre géométrie et intuition spatiale, qui était une question très controversée dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle. Quel rapport y a-t-il entre l'espace physique dans lequel nous vivons, l'espace dans lequel nous situons les objets perçus et représentés et l'espace géométrique ? Dans les années soixante-dix du dix-neuvième siècle, Hermann Helmholtz a essayé de donner une justification philosophique de la géométrie riemannienne et de la géométrie hyperbolique, qui avaient été démontrées comme étant logiquement cohérentes. Helmholtz a fait une distinction entre l'espace physique, qui est euclidien, et l'espace intuitif ou représentatif, qui est compatible tant avec la géométrie euclidienne qu'avec les géométries non euclidiennes, mais pas avec d'autres théories de l'espace. Selon le point de vue de Helmholtz, on ne peut pas justifier des géométries de l'hyperespace, parce qu'une théorie géométrique doit inclure les propriétés de l'espace intuitif, et l'espace intuitif ne peut avoir que trois dimensions. Pour légitimer d'autres théories géométriques, par exemple la géométrie d'un espace à quatre dimensions, Giuseppe Veronese et Henri Poincaré proposent deux solutions différentes. Veronese soutient l'idée d'un accord nécessaire entre les propriétés de l'espace, que nous découvrons par observation de certains objets physiques, et les axiomes de la géométrie, mais il renonce à la restriction que l'espace représentatif ait trois dimensions. Poincaré, au contraire, ne présuppose pas que les axiomes de la géométrie s'accordent avec les propriétés de l'espace représentatif. Il affirme plutôt dans *La science et l'hypothèse* qu'on peut choisir conventionnellement les axiomes qui décrivent l'espace, pourvu qu'ils soient cohérents : le choix des axiomes reste libre, mais il est guidé par des faits expérimentaux.

1. Le texte suivant est une nouvelle version d'une communication au Séminaire des Archives Poincaré sur le concept d'espace. Je remercie tous les participants pour les précieuses observations critiques dont j'ai tenu compte pendant la rédaction finale du texte.

2 La nature mixte de la géométrie : une science formelle et expérimentale

En reprenant une distinction de Hermann Grassmann entre sciences formelles et sciences réelles [Grassmann 1844, 22], Veronese partage les sciences en formelles (logique et mathématiques pures) et expérimentales (physique et mécanique). Les sciences formelles étudient les formes, c'est-à-dire les produits de la pensée qui n'ont pas nécessairement une existence réelle, ou comme le dit Veronese, « les choses pensées qui n'ont pas nécessairement une image existant dans un champ qui existe effectivement en dehors de la pensée » [Veronese 1891, vii]. Les sciences expérimentales étudient les objets qui existent effectivement en dehors de la pensée. Dans les sciences formelles, la vérité dépend de l'accord entre différents actes de la pensée, c'est-à-dire seulement du principe de contradiction ; dans les sciences expérimentales la vérité dépend aussi de l'accord entre la pensée et l'objet, ou mieux, de l'accord entre la pensée et la représentation mentale de l'objet. Les prémisses des sciences formelles sont des définitions ou hypothèses, parce qu'elles déterminent avec un acte créatif les propriétés des entités idéales dont elles parlent ; les prémisses des sciences expérimentales sont au contraire des axiomes, qui décrivent approximativement les propriétés des objets réels.

La géométrie n'est pas une science formelle et elle n'est pas une science expérimentale non plus, mais plutôt une science mixte : la nature de ses objets et de ses prémisses est double. Les *objets* de la géométrie sont en partie purement *idéaux*, parce qu'ils sont des produits de la pensée, et en partie *obtenus par abstraction*, c'est-à-dire que leurs propriétés sont déterminées à partir de l'observation de certains objets physiques concrets. Par l'application d'une loi générale de la pensée nous pouvons aussi sortir au dehors du champ de l'expérience et déterminer par exemple les propriétés d'une ligne illimitée. Le concept de ligne droite illimitée est en effet obtenu par quatre actes successifs d'abstraction : on observe un bâton très mince ; premièrement, on fait abstraction des propriétés physiques du bâton et on retient seulement l'extension ; deuxièmement, on fait un passage à la limite en considérant la largeur du bâton comme étant nulle ; troisièmement, on fait abstraction de toutes les imperfections de l'objet ; quatrièmement, on sort du champ de l'expérience en imaginant que le bâton s'étend sans fin dans les deux directions.

La géométrie a une nature mixte non seulement parce que ses objets sont en partie idéaux et en partie obtenus par abstraction des objets réels, mais aussi parce que ses prémisses sont en partie empiriques et en partie semi-empiriques et purement abstraites [2]. Les prémisses empiriques sont des vérités évidentes qu'on saisit par l'intuition quand on observe certains objets physiques : par exemple la proposition suivante, qui définit les propriétés d'un

2. Veronese n'utilise pas le terme *semi-empirique*, qui a été introduit par Aldo Brigaglia dans un article sur Giuseppe Veronese et la géométrie de l'hyperespace en Italie [Brigaglia 1994, 256].

segment rectiligne : « la droite, dans le champ de notre observation, est déterminée par deux de ses points quelconques » [Veronese 1902, 435] [3]. Les prémisses semi-empiriques ont une origine empirique mais elles ne sont pas vérifiables empiriquement, parce qu'elles sortent du champ d'une observation possible. Par exemple, la proposition « la ligne droite est déterminée par deux de ses points quelconques », où par ligne droite on entend une ligne illimitée. La distinction entre prémisses empiriques et prémisses semi-empiriques a été probablement inspirée par les *Éléments* d'Euclide, où il y a deux prémisses différentes pour le segment rectiligne et pour la droite illimitée. La géométrie contient enfin des prémisses purement abstraites, qui concernent des objets qui n'existent pas du tout dans le champ de l'observation : par exemple le postulat du continu formulé par Dedekind, le postulat de l'espace à quatre dimensions, l'hypothèse des parallèles, l'hypothèse de la divisibilité en parties d'une ligne droite, les hypothèses de l'infiniment petit et de l'infini actuel.

Est-ce qu'il y a alors un critère pour déterminer quelles prémisses géométriques sont possibles ? Les prémisses empiriques sont déterminées par certains phénomènes physiques (par exemple le mouvement d'un bâton) ; les prémisses semi-empiriques et celles qui sont purement abstraites peuvent être choisies librement à condition qu'elles ne soient pas elles-mêmes contradictoires et qu'elles ne contredisent pas les prémisses précédemment admises, c'est-à-dire les prémisses empiriques. Autrement dit, la condition pour que les prémisses géométriques soient possibles n'est pas seulement la cohérence logique, mais aussi la conformité à l'intuition de l'espace, c'est-à-dire aux propriétés intuitives spatiales exprimées dans les prémisses empiriques. Cette dernière condition, qui révèle que la géométrie est encore considérée comme science de l'espace, distingue la géométrie des mathématiques pures : une théorie, qui nie les propriétés élémentaires des objets physiques que nous connaissons par intuition, n'est pas selon Veronese une géométrie mais plutôt une théorie mathématique abstraite.

3. Les prémisses empiriques de la géométrie sont selon Veronese les suivantes : 1) Il y a des points distincts. Tous les points ne sont pas identiques. 2a) Il y a un système de points à une dimension identique par rapport à la position de ses parties et déterminé par deux de ses points et continu. Ce système s'appelle ligne droite. 2b) Il y a des points en dehors de la ligne droite. Chaque point qui n'appartient pas à la droite détermine avec chacun des points de celle-ci une autre ligne droite. 3) Si deux lignes droites quelconques ont un point commun A, un segment (AB) de l'une est identique à un segment (AB') de l'autre. 4) Si un côté d'un triangle quelconque devient indéfiniment petit, la différence entre les deux autres côtés devient aussi indéfiniment petite. 5) Sur deux droites quelconques on choisit deux couples de segments $AB = XY$ et $AC = XZ$; si le segment $BC = YZ$, alors les deux droites sont identiques.

3 L'intuition géométrique

On a dit que selon Veronese une prémisse géométrique est possible, si elle est compatible avec l'intuition de l'espace, mais qu'est-ce qu'on doit entendre par intuition ? J'esquisserai brièvement les conceptions de Helmholtz, Klein, Veronese. L'intuition géométrique est-elle une intuition empirique immédiate ? Ou plutôt une intuition médiate à travers un concept ? Ou encore est-elle un acte immédiat qui permet de saisir des objets purement idéaux ?

1. Si par intuition on entend un acte immédiat et direct lié à la perception sensible, on doit admettre la perceptibilité immédiate comme condition de l'intuition d'un objet. Comme les entités géométriques ne sont pas perceptibles, ni les objets géométriques ni les propriétés décrites dans les axiomes ne peuvent être objet d'intuition (selon ce sens du mot intuition).

2. Hermann Helmholtz définit l'intuition géométrique comme une intuition médiate, dans laquelle un concept joue le rôle de médiateur. Nous pouvons avoir l'intuition d'un objet si nous pouvons formuler et spécifier d'une façon non ambiguë les impressions sensorielles déterminées par l'objet dans nos sens [Helmholtz 1878, 231].

3. Felix Klein définit l'intuition géométrique comme un acte immédiat et pas médiat qui permet de saisir des objets purement idéaux. Il fait une distinction entre une intuition naïve et une intuition fine. L'intuition géométrique propre de tout homme adulte capable de former des images géométriques est considérée comme naïve : elle se développe avec des expériences mécaniques. Au contraire, l'intuition propre du géomètre, pour qui les objets idéaux de la géométrie sont familiers, est appelée fine [Klein 1893, 225].

L'intuition géométrique est selon Veronese quelque chose de très proche, comme il le dit lui-même, de l'intuition de Klein. Elle est le résultat de la combinaison de l'intuition empirique et de l'abstraction [Veronese 1891, viii] et pas une forme *a priori* transcendantale de l'esprit, comme le démontrerait le fait que l'intuition des relations spatiales entre les objets n'est pas une qualité innée, mais se développe grâce à l'habitude et à l'expérience. C'est pour cela que l'intuition géométrique est mieux développée chez les géomètres et les peintres [Veronese 1906, 13–14].

4 L'espace géométrique chez Helmholtz

Je reviens maintenant à la distinction entre espace physique, espace représentatif et espace géométrique. J'esquisserai seulement quelques traits de la question : la présentation de certains problèmes relatifs aux fondements de la géométrie au dix-neuvième siècle sera peut-être simplifiée, mais nous permettra de souligner les points les plus importants pour comprendre la différence entre Veronese et Poincaré. Après la découverte des théories géométriques qui sont aussi cohérentes que la géométrie euclidienne mais qui ne sont pas compatibles avec elle, plusieurs mathématiciens (parmi lesquels Gauss) ont introduit une distinction entre espace physique et espace géométrique abstrait et ont considéré la géométrie comme une science expérimentale, qui décrit avec une certaine approximation les propriétés de l'espace physique. La prééminence de la géométrie euclidienne n'est pas expliquée par une nécessité logique, mais par la présomption qu'elle décrit mieux la réalité ; pourtant la géométrie euclidienne serait la vraie science de l'espace physique. La connaissance de l'espace que la géométrie fournit n'est pas nécessaire (parce qu'elle est le résultat d'une généralisation empirique) et ne peut pas être fondée purement *a priori*, parce que sa vérité dépend des propriétés de l'espace physique, c'est-à-dire « de quelque chose qui existe au dehors de nous et qui ne peut pas être seulement un produit de notre esprit » [Gauss 1806, 201].

Pour justifier la possibilité d'avoir l'intuition d'espaces non euclidiens et pour fonder philosophiquement la science géométrique, Helmholtz introduit une distinction entre espace physique et espace représentatif et essaie d'expliquer la raison de la cohérence des géométries non euclidiennes par l'accord avec la représentation intuitive que nous avons de l'espace. Si l'espace euclidien est la forme *a priori* de l'intuition et la géométrie est entendue comme science de l'espace physique, elle ne peut pas être autre qu'euclidienne. Si au contraire l'espace géométrique est considéré comme étant distinct de l'espace physique, on peut soutenir qu'il est compatible avec la représentation intuitive de l'espace. La forme *a priori* de l'intuition n'est pas l'espace décrit par la géométrie euclidienne, mais un espace sous-déterminé par rapport à celui-là. Pour affirmer que l'espace est la forme *a priori* de l'intuition sans soutenir que la géométrie euclidienne est la seule géométrie possible, Helmholtz détermine en effet un groupe minimal d'axiomes qui décrivent les propriétés *a priori* de l'espace et qui sont communs à la géométrie euclidienne, à la géométrie riemannienne et à la géométrie hyperbolique. D'une part, Helmholtz croit qu'il y a un espace (semblable à la forme transcendantale kantienne) qui est condition nécessaire de la connaissance spatiale, d'autre part, il nie que les déterminations de l'espace euclidien soient *a priori* [Helmholtz 1878, 700–701]. Pour expliquer la différence entre une forme de l'espace que nous connaissons *a priori* et l'espace euclidien que nous connaissons *a posteriori*, Helmholtz fait une distinction entre l'espace représentatif ou intuitif et l'espace géométrique. L'espace représentatif est unique et il est la condition de possibilité de l'expérience ; l'espace géométrique au contraire est une description abstraite du premier. Puisqu'il y a différentes descriptions de l'espace représentatif qui sont également cohérentes au point de vue logique, l'espace géométrique n'est pas unique ; il y a trois espaces géométriques différents : l'espace euclidien, l'espace riemannien et l'espace hyperbolique. Les trois théories géométriques sont toutes compatibles avec l'intuition de l'espace, parce que nous pouvons nous représenter un corps dans un espace non euclidien. La géométrie euclidienne est la meilleure description de l'espace physique parce que ses axiomes décrivent le mouvement des corps rigides en accord avec les lois de la mécanique.

Quel est l'avantage au point de vue philosophique de l'affirmation qu'il y a un espace intuitif qui est compatible avec les trois géométries nommées ? On peut tout aussi bien déterminer un objet commun aux trois géométries qu'expliquer pourquoi on ne peut pas démontrer *a priori* la vérité de la géométrie euclidienne. Toutefois, la possibilité d'un espace géométrique abstrait dépend de l'accord avec l'intuition et en particulier avec l'intuition tridimensionnelle. Selon Helmholtz, nous ne pouvons ni avoir l'expérience directe d'un objet dans un espace à quatre dimensions ni imaginer quelles impressions sensorielles il produirait en nous : donc, selon la définition d'intuition géométrique donnée par Helmholtz, nous ne pouvons pas avoir l'intuition d'un tel objet.

Je résume alors la conception de Helmholtz, que je prends ici comme point de départ de l'exposition de la différence entre Veronese et Poincaré. 1) D'une part, Helmholtz distingue la possibilité abstraite d'une géométrie de l'existence physique de l'espace qu'elle décrit et ainsi il justifie les géométries non euclidiennes. 2) D'autre part, il soumet la possibilité d'avoir une représentation d'une géométrie en accord avec l'intuition tridimensionnelle et c'est pour cela qu'il nie la possibilité de la quatrième dimension.

Comment est-ce qu'on peut justifier la géométrie de l'hyperespace ? Une solution à cette question a été donnée aussi bien par Poincaré que par Veronese.

5 Espace géométrique et espace représentatif chez Poincaré

Je présenterai d'abord la conception de l'espace de Poincaré ; ensuite je décrirai de façon plus détaillée la conception de Veronese, qui est beaucoup moins connue. Dans un article de 1894, qui a pour titre *L'espace et la géométrie* et qui a été publié comme quatrième chapitre de *La science et l'hypothèse*, Poincaré développe une analyse très précise de l'espace représentatif, pour montrer qu'il y a des différences essentielles entre l'espace représentatif et l'espace géométrique. *L'espace géométrique*, qui fait l'objet de la géométrie, est continu ; il est infini ; il a trois dimensions ; il est homogène, c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux ; il est isotrope, c'est-à-dire qu'il n'y a pas une direction privilégiée. *L'espace représentatif*, qui « sert de cadre à nos sensations et à nos représentations », n'a pas toutes les propriétés nommées : « il n'est ni homogène, ni isotrope ; on ne peut même pas dire qu'il ait trois dimensions » [Poincaré 1902, 78–81].

Par exemple, l'*espace visuel pur*, qui sert de cadre aux impressions purement visuelles dues « à une image qui se forme sur le fond de la rétine », a *deux dimensions* et n'est *pas homogène*, parce que les points qui sont au bord et ceux qui sont au centre de la rétine ne contribuent pas de façon égale à la formation des images visuelles d'un objet.

L'*espace visuel complet*, qui sert de cadre aux impressions purement visuelles et à certaines sensations musculaires qui nous donnent la notion de la troisième dimension, n'est *pas isotrope*, parce que la troisième dimension ne nous apparaît pas comme jouant le même rôle que les deux autres. En outre il n'est pas nécessaire qu'il ait trois dimensions : c'est au contraire « un fait d'expérience externe ».

> Rien n'empêche de supposer qu'un être ayant l'esprit fait comme nous, soit placé dans un monde où la lumière ne lui parviendrait qu'après avoir traversé des milieux réfringents de forme compliquée. (...) Un être qui ferait dans un pareil monde l'éducation des ses sens, attribuerait sans doute quatre dimensions à l'espace visuel complet. » [Poincaré 1902, 80]

L'espace moteur a trois dimensions, mais ceci n'est pas nécessaire : il est plutôt le résultat d'une interaction entre nos organes sensoriels et le milieu dans lequel nous vivons. Le sentiment de la direction est le produit d'une association des sensations musculaires, laquelle est le résultat d'une habitude, qui elle-même résulte des nombreuses expériences.

> Sans aucun doute, si l'éducation de nos sens s'était faite dans un milieu différent, où nous aurions subi des impressions différentes, des habitudes contraires auraient pris naissance et nos sensations musculaires se seraient associées selon d'autres lois. [Poincaré 1902, 81]

L'espace géométrique a des propriétés différentes de celles de l'espace représentatif : donc il ne peut pas être considéré comme nécessaire en tant que forme *a priori* de l'intuition. Même l'espace représentatif, bien qu'il soit une condition de l'expérience, n'est pas nécessaire : au contraire, rien n'empêche de supposer que si notre milieu était différent, l'espace visuel complet ou l'espace moteur auraient pu avoir quatre dimensions plutôt que trois.

Si l'idée d'un espace géométrique ne s'impose pas à notre esprit et ne peut être fournie par aucune sensation isolée, comment est-elle née ? « Nous y sommes amenés, répond Poincaré, en étudiant les lois suivant lesquelles les sensations se succèdent » [Poincaré 1902, 83]. L'espace géométrique n'est pas un cadre imposé à chacune de nos représentations, considérée individuellement, sinon il serait impossible de se représenter une image dépouillée de ce cadre. Nous ne nous représentons pas les corps extérieurs dans l'espace géométrique : nous nous les représentons dans l'espace représentatif. Nous pouvons néanmoins raisonner sur ces corps comme s'ils étaient dans l'espace géométrique, c'est-à-dire dans un espace qui est déterminé par les lois suivant lesquelles se succèdent nos images de ces corps. Nous pourrions aussi imaginer que de telles lois soient différentes et ainsi nous raisonnerions sur les objets comme s'ils étaient dans un espace différent. Affirmer que nous pouvons nous représenter un espace, par exemple l'espace hyperbolique, veut dire que nous pouvons raisonner comme si les corps étaient dans cet espace, c'est-à-dire que nous pouvons supposer que les lois selon lesquelles se succèdent nos images de ces corps soient différentes des lois selon lesquelles elles se succèdent effectivement. Mais pas trop différentes. Par exemple, si ces lois sont les lois qui déterminent une géométrie non-archimédienne, nous ne pouvons pas raisonner comme si les corps étaient dans un espace de ce genre.

6 La conception de l'espace chez Veronese

Veronese distingue l'espace géométrique de l'espace physique et de l'espace représentatif en s'appuyant sur sa conception de l'intuition géométrique comme combinaison d'intuition et d'abstraction. Il maintient, comme Helmholtz, que la géométrie est une description de l'espace dont nous avons l'intuition, mais il n'attribue pas à cet espace les mêmes propriétés qu'il attribue à l'espace euclidien. L'ensemble minimal d'axiomes qui décrivent l'espace intuitif, ne coïncide pas avec celui qui est donné par Helmholtz : l'espace intuitif, comme l'espace géométrique, n'a pas un nombre déterminé de dimensions.

L'espace physique ne peut pas être défini, parce qu'il n'est pas un concept : il est le milieu qui contient les corps qui existent en dehors de nous et il est déterminé par le champ de notre observation. Il est l'objet de la physique et il a trois dimensions [Veronese 1895-7, 33–34]. *L'espace intuitif* ne peut pas non plus être défini, parce qu'il est une intuition : il est une représentation idéalisée de l'espace physique et le milieu qui contient les représentations des corps que nous percevons avec les sens. Il est lié à la perception sensible, de laquelle il dépend. Quand nous percevons avec les sens (surtout le toucher et la vue) la présence des corps au dehors de nous, nous avons aussi l'idée qu'il y a un certain milieu qui contient ces corps et dans lequel chaque corps occupe une place déterminée [Veronese 1905, 210].

L'espace géométrique peut être défini, parce qu'il est un concept, un produit abstrait du raisonnement humain [Veronese 1905, 202]. L'espace géométrique est obtenu par abstraction de l'espace intuitif : il ne contient ni les objets physiques réels ni les représentations sensibles correspondantes, mais des entités purement abstraites. L'espace géométrique est défini comme un système de points ayant la propriété suivante : pour chaque figure qu'on peut construire, il y a au moins un point en dehors. Cela veut dire que, si on considère une figure à n dimensions, on peut toujours construire une autre figure qui ait $n+1$ dimensions. Donc il y a des espaces géométriques qui ont trois dimensions, des espaces qui en ont quatre et ainsi de suite.

L'espace géométrique euclidien est défini selon son concept non comme une description abstraite de l'espace physique, mais comme un cas particulier et à trois dimensions d'un espace géométrique général, qui n'a pas un nombre déterminé de dimensions.

> (...) les propriétés [de cet espace] qu'on ne peut pas démontrer (et donc qu'on assume comme prémisses) dérivent en partie de l'observation externe et en partie de certains principes abstraits qui ne contredisent pas les propriétés empiriques ; les figures, autant que le point garde sa signification primitive, sont toujours accompagnées par l'intuition spatiale. [Veronese 1891, 211] [4]

Les figures de l'espace général sont accompagnées par l'intuition. Donc on peut aussi avoir l'intuition d'espaces qui ont plus de trois dimensions et cela est vrai, parce que l'espace intuitif n'est pas défini comme ayant un nombre déterminé de dimensions. Cela n'est pas dit explicitement par Veronese, mais on peut le déduire des trois faits suivants.

1. Premièrement, puisque l'espace physique a trois dimensions, si nous voulons appliquer la géométrie à cet espace, nous devons poser comme axiome pratique que l'espace intuitif a trois dimensions : « L'espace intuitif est une figure avec trois dimensions par rapport à ses points » [Veronese 1891, 454]. Cela veut dire qu'on ne peut pas affirmer que l'espace intuitif ait trois dimensions si on ne pose pas explicitement cela comme axiome. En particulier, cet axiome est nécessaire seulement pour l'application de la géométrie à l'espace physique. D'autres axiomes nécessaires pour cette application pratique de la géométrie sont l'axiome du mouvement des corps rigides et l'axiome des parallèles. On peut donc affirmer qu'entre les propriétés qui caractérisent l'espace intuitif, il n'y a pas ces caractéristiques de l'espace euclidien. Donc l'espace intuitif est compatible avec les géométries non euclidiennes et avec la géométrie de l'hyperespace ou, autrement dit, on peut avoir l'intuition de ces géométries.
2. Deuxièmement, dans un espace à quatre dimensions le point est tout à fait comme le point d'un espace à trois dimensions, c'est-à-dire que nous pouvons avoir l'intuition du premier exactement comme nous pouvons avoir l'intuition du deuxième :

   > [Dans la définition d'espace général] le point n'est ni un système de nombres ni un objet quelconque, mais le point exactement comme nous nous le représentons dans l'espace ordinaire. Les objets composés de points sont des objets (figures) auxquels nous appliquons continuellement l'intuition spatiale combinée avec l'abstraction, et donc la méthode synthétique. [Veronese 1891, 610] [5]

4. "Lo spazio generale è dato da un sistema di punti tale che, data o costruita una figura qualunque vi è almeno un altro punto fuori di essa; le cui proprietà non dimostrabili derivano in parte dall'osservazione esterna e in parte da principi astratti che non contraddicono alle prime; e le figure, finché il punto conserva il suo primitivo significato sono sempre accompagnate dall'intuizione spaziale."

5. "(...) il punto non è né un sistema di numeri, né un oggetto di natura qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario; e gli oggetti

3. Troisièmement, Veronese attribue explicitement au concept d'une intuition de l'hyperespace un sens : ce concept peut être compris seulement si on considère l'intuition géométrique comme le résultat de la combinaison de l'intuition et de l'abstraction. Comment pouvons-nous avoir l'intuition d'un espace à quatre dimensions ? Veronese utilise un exemple qu'on peut trouver aussi chez Helmholtz [Helmholtz 1876, 668], Poincaré [Poincaré 1902, chap. 5] et qu'on retrouve dans un célèbre livre de Edwin Abbott, *Flatland* :

> Imaginons-nous qu'il existe dans le plan un être doué de raison qui a deux dimensions ; imaginons en outre que son monde est le plan et que cet être peut prouver par son expérience seulement l'existence de la partie du plan dans laquelle il fait ses observations. Pour mieux imaginer cet être hypothétique, imaginons notre ombre sur un plan ; à chacun de nos mouvements correspond un mouvement de l'ombre et si nous faisons abstraction de notre personne, cette ombre nous apparaît comme un être qui vit et se meut sur le plan. [Veronese 1891, 457] [6]

Si nous supposons que notre ombre puisse imaginer avec sa raison qu'en dehors du plan existe un point, nous pourrions affirmer que l'ombre parvient à la représentation de l'espace tridimensionnel exactement comme nous parvenons à imaginer l'espace à quatre dimensions. Maintenant si nous nous mettons à la place de notre ombre, ou mieux de cet être hypothétique doué de raison, nous pouvons supposer logiquement qu'en dehors de notre espace il y ait un autre point et en conclure l'existence idéale de l'espace à quatre dimensions [Veronese 1891, 458].

Veronese ne propose pas seulement cette expérience mentale, mais aussi une manière de représenter une figure à quatre dimensions sur une feuille, c'est-à-dire sur un plan. Je ne présente pas en détail cette procédure, qui est très compliquée. J'ajoute seulement qu'elle est basée sur une méthode par projections et sections et je résume les observations conclusives de Veronese.

Si on recourt à l'abstraction, « il semble qu'on ait presque l'intuition d'une figure à quatre dimensions représentée sur le plan, tandis que ce fait est le résultat de cette abstraction combinée avec l'intuition spatiale » ; cette illusion

composti di punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata coll'astrazione, e quindi il metodo sintetico."

6. "Immaginiamo che nel piano, esista un ente ragionevole a due dimensioni, il cui mondo non sia che il piano e che colla sua esperienza possa provare soltanto l'esistenza della parte del piano in cui esso può eseguire le sue osservazioni. Per immaginarci meglio questo essere ipotetico, figuriamoci la nostra ombra sopra un piano; ad ogni nostro movimento corrisponde un movimento di essa, e se noi facciamo astrazione dalla nostra persona, ci pare che quell'ombra sia un ente che abbia vita e si muova nel piano."

n'est jamais complète mais elle permet d'imaginer la projection d'une figure à quatre dimensions dans l'espace ordinaire [Veronese 1891, 612] [7].

Veronese croit donc que nous pouvons nous représenter un espace à quatre dimensions, bien que nous n'en puissions pas avoir une intuition complète. Là où l'intuition n'arrive pas, arrive l'abstraction, qui est très développée chez les géomètres comme chez les peintres : se représenter une figure à quatre dimensions dans l'espace ordinaire n'est pas autre chose que peindre un corps tridimensionnel sur une toile. La possibilité de se représenter des hyperespaces dépend de l'introduction d'un concept d'intuition géométrique, qui est radicalement différente de l'intuition dont parle Euclide. Ce concept d'intuition géométrique est une extension du concept d'intuition spatiale, qui joue le rôle de critère de distinction entre théories mathématiques et théories géométriques. Le fondement intuitif, qui, selon Kant, était un trait commun à la géométrie et aux mathématiques, devient chez Veronese le critère de distinction entre les deux sciences. Comme on l'a dit en exposant sa conception de la géométrie, on ne peut pas poser comme prémisses des hypothèses qui contredisent les axiomes empiriques, qui expriment les propriétés de l'intuition spatiale. Par exemple on ne peut pas nier qu'un segment rectiligne est déterminé par deux de ses points ou qu'un cercle est déterminé par trois de ses points. Juste parce qu'il dérive d'une combinaison de l'intuition empirique et de l'intuition abstraite, l'espace géométrique doit garder les propriétés que nous attribuons intuitivement aux objets situés dans un espace tridimensionnel.

L'accord avec l'intuition spatiale sépare la géométrie d'autres théories mathématiques et limite la possibilité de choisir conventionnellement les prémisses géométriques : c'est là un des points où la position de Veronese diffère le plus de celle de Poincaré, qui nomme géométrie la théorie de l'hyperboloïde à une nappe, qui a pour axiome une proposition qui contredit selon Veronese notre intuition spatiale. La proposition est la suivante : « Il est impossible de faire coïncider une droite avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de 180° autour d'un de ses points » [Poincaré 1887, 82].

Poincaré dit explicitement que la raison pour laquelle la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe avait échappé aux théoriciens de son temps était précisément le fait qu'elle entraîne des propositions qui étaient considérées comme implicitement fausses parce que trop contraires aux habitudes de notre esprit. Ce qui est selon Veronese la raison pour laquelle elle ne peut pas être considérée comme une géométrie.

7. "(...) pare quasi di avere l'intuizione di questo fatto, mentre esso è il risultato di questa astrazione combinata colla intuizione spaziale. Certo che la illusione non è completa come nella rappresentazione piana, perché dovremmo intuire la retta PX in modo da non avere che un solo punto con (ab), e ciò è impossibile, perché non intuiamo completamente che lo spazio a tre dimensioni. Ma come questa illusione non è necessaria per la costruzione della rappresentazione piana di una figura a tre dimensioni, non lo è neppure in quella delle figure a quattro o a più di quattro dimensioni nello spazio ordinario."

7 Poincaré et Veronese : quelle relation y a-t-il entre espace représentatif et espace géométrique ?

Je peux maintenant répondre à la question que j'avais posée auparavant, c'est-à-dire comment peut-on justifier la géométrie de l'hyperespace, en comparant les réponses de Poincaré et de Veronese.

Poincaré nie la condition que la possibilité abstraite d'une géométrie soit soumise à l'accord complet avec l'espace représentatif, qui sert de cadre à nos sensations et à nos représentations. Il admet pourtant la possibilité de choisir conventionnellement les axiomes de la géométrie. Il n'y a pas d'autres conditions que la cohérence pour la possibilité abstraite d'un espace géométrique, mais il y a des conditions pour qu'on puisse se représenter cet espace : on peut se représenter un espace non euclidien ou un espace à quatre dimensions mais on ne peut pas se représenter un espace non-archimédien, parce que ceci présuppose un continu de troisième ordre et diffère donc trop profondément de l'espace ordinaire.

Veronese au contraire maintient que l'espace géométrique doit s'accorder avec l'intuition de l'espace, mais il nie que l'espace intuitif soit tridimensionnel ou archimédien. Il refuse la possibilité de choisir conventionnellement les axiomes d'une géométrie, mais il soumet les axiomes à l'accord avec l'intuition spatiale exprimée dans les prémisses empiriques : celles-ci ne peuvent pas être niées.

Toutes les théories géométriques compatibles avec ces prémisses sont représentables : la géométrie hyperbolique, la géométrie riemannienne, la géométrie de l'hyperespace aussi bien que la géométrie non-archimédienne. Il y a aussi d'autres théories cohérentes, qui décrivent des propriétés de points et de droites, mais qui ne sont pas des géométries, parce qu'elles contredisent les prémisses empiriques : ce sont plutôt des théories mathématiques abstraites.

La condition selon laquelle les axiomes s'accordent avec l'intuition spatiale exprimée par les prémisses empiriques n'est pas une limitation superflue de la liberté de choisir les axiomes. Cette condition joue, selon moi, un rôle important dans l'épistémologie de Veronese : elle fournit un critère de distinction entre la géométrie comme science de l'espace et les mathématiques pures. C'est en effet par les prémisses empiriques que la géométrie est caractérisée comme science mixte et pourtant distincte des sciences formelles.

Poincaré au contraire ne soumet la possibilité géométrique à aucune condition supplémentaire par rapport aux mathématiques. Il n'utilise donc pas ce critère pour faire une distinction entre possibilité géométrique et possibilité mathématique, bien qu'il dise que le choix des axiomes géométriques est guidé par des faits expérimentaux. Poincaré considère comme géométriquement possible beaucoup plus de théories que Veronese, mais il considère qu'il y a moins de théories géométriques qui soient représentables intuitivement. En particulier, bien qu'il admette que la géométrie de l'hyperespace pourrait être représentable si le milieu dans lequel nous vivons était différent, il affirme que nous ne pouvons pas imaginer un espace non-archimédien. Notre espace représentatif est selon lui incompatible avec une telle géométrie, parce qu'elle modifie radicalement notre notion habituelle de continu de deuxième ordre et diffère pourtant « beaucoup trop profondément de notre espace ordinaire » [Poincaré 1902, 93].

Veronese dit au contraire que la géométrie non-archimédienne contient des hypothèses purement abstraites, qu'on peut accepter ou refuser, mais qui ne sont pas en contraste avec l'intuition spatiale. Bien que je n'aille pas exposer de façon détaillée la notion du continu non-archimédien de Veronese ni la comparer avec les observations de Poincaré sur le continu mathématique, j'essayerai néanmoins d'esquisser brièvement la différence entre les deux auteurs à ce propos.

8 Le continu de deuxième ordre et le continu non-archimédien

Je présente ici la conception du continu qu'on trouve dans la *Science et l'Hypothèse* et je ne mentionne pas les élaborations successives de Poincaré sur la notion de continu. On peut ainsi mieux comprendre la différence essentielle qui sépare Veronese de Poincaré à cette époque.

Poincaré identifie le continu mathématique avec le continu des nombres réels. Cette notion de continu est obtenue par des accroissements successifs du domaine des nombres et implique pourtant que les éléments du continu soient extérieurs les uns aux autres. Le concept de continu mathématique, qui est un système ordonné de points, s'oppose au concept de continu physique, qui est le continu que nous percevons avec les sens. On a observé — affirme Poincaré — qu'on ne peut pas distinguer un poids de 10 grammes et un poids de 11 grammes et de même un poids de 11 grammes d'un poids de 12 grammes, mais qu'on peut facilement distinguer le premier du dernier. Ce qui est exprimé par les relations suivantes : A égale B, B égale C, A est plus petit que $C\,(A = B, B = C, A < C)$, relations que Poincaré considère comme la formule du continu physique ($SH, 51$). Il y a là une contradiction, que les mathématiciens éliminent en créant un continu mathématique, qui puisse décrire de façon adéquate le continu physique. Le vrai continu mathématique est un ensemble d'individus extérieurs les uns aux autres : il s'oppose donc à la conception ordinaire de continu, « où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point » [Poincaré 1902, 48].

La conception de Veronese est radicalement différente. Premièrement le vrai continu mathématique n'est pas le continu analytique des nombres réels, mais plutôt un continu synthétique, c'est-à-dire un système ordonné de segments et pas de points. La ligne en effet préexiste au point, qui n'est autre qu'un signe de séparation de segments sur une ligne. Les propriétés du continu synthétique ne correspondent pas nécessairement à celles du continu analytique : en particulier il n'est pas nécessairement vrai que, si A est plus petit que $B\,(A < B)$, il y ait toujours un nombre naturel n tel que le produit de n par A sera plus grand que B $(nA > B)$. C'est-à-dire, le continu synthétique peut être non-archimédien et contenir des segments infiniment petits (c'est-à-dire qui ne peuvent jamais devenir plus grands que d'autres segments donnés) et infiniment grands. Veronese associe ensuite des nombres à ces segments et il obtient un système ordonné non-archimédien. Poincaré ne comprend pas l'originalité de la construction synthétique de Veronese et dans un compte rendu de l'œuvre de Hilbert de 1904 il affirme que Veronese développe « une véritable arithmétique et une véritable géométrie non-archimédiennes où les nombres transfinis de Cantor jouent un rôle prépondérant » [Poincaré 1904]. Au contraire, les nombres de Veronese sont introduits avec un procédé synthétique radicalement différent de celui de Cantor et en conséquence ils ont des propriétés différentes. Veronese peut étendre aux nombres infiniment grands les propriétés des nombres réels, tandis que les transfinis de Cantor ne sont pas commutatifs par rapport à la somme. En outre, il n'y a pas dans le continu de Veronese un premier nombre infini par rapport aux nombres réels, tandis qu'il y a un premier nombre transfini dans le système de Cantor. Il y a donc une différence essentielle entre le continu analytique dont parle Poincaré et le continu synthétique de Veronese, bien que Poincaré ne semble pas capable de la comprendre.

Deuxièmement, Veronese diffère de Poincaré parce qu'il croit que le continu mathématique, s'il est conçu synthétiquement, donne une description adéquate du continu intuitif. Poincaré au contraire soutient que le continu mathématique s'oppose à la conception ordinaire du continu.

Enfin, selon Veronese le continu non-archimédien ne contredit nullement les propriétés du continu intuitif, parce que les segments infiniment petits ne sont pas observables. Le continu non-archimédien est donc aussi représentable qu'un espace à quatre dimensions. C'est là une troisième différence : Poincaré au contraire soutient que nous ne pouvons pas imaginer un espace non-archimédien, parce qu'il diffère trop profondément de notre espace ordinaire.

Bibliographie

Abbott, Edwin Abbott

1882 *Flatland. A Romance of Many Dimensions*, London: Seeley and Co., 1884.

Agazzi, Evandro & Palladino, Dario

1978 *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Milano: Mondadori.

Baldassarri Ghezzo, Santuzza

1995 *Giuseppe Veronese Matematico dell'Università di Padova*, Padova: Decibel.

Boi, Luciano

1995 *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Heidelberg : Springer Verlag.

1996 Les géométries non euclidiennes, le problème philosophique de l'espace et la conception transcendantale ; Helmholtz et Kant, les neokantiens, Einstein, Poincaré et Mach, *Kant-Studien* 87, 257–289.

Boi Luciano, Flament Dominique & Salanskis Jean-Michel (eds.)

1992 *1830-1930: A Century of Geometry*, Berlin, Heidelberg: Springer.

Bordiga, Giovanni

1930-31 Commemorazione di Giuseppe Veronese, *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, 90, II, 48–72.

Bottazzini, Umberto

1990 *Il flauto di Hilbert: Storia della matematica moderna e contemporanea*, Milano: Utet.

Brigaglia, Aldo

1994 Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia, in AAVV, *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento. Atti del Terzo Seminario di Storia delle Scienze e delle Tecniche nell'Ottocento Veneto*, Venezia: Istituto Veneto, 231–261.

Bullo, Carlo

1904 *Biografia del prof. Comm. Giuseppe Veronese di Chioggia. Senatore del Regno*, Chioggia: Vianelli & C.

Bussotti, Paolo

1997 *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, Pisa: ETS.

Busulini, Bruno

1969-70 La retta non-archimedea di Giuseppe Veronese, *Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti*, Atti della Classe di Scienze Matematiche e Naturali, 128, 239–263.

Cahan, David (ed.)

1994 *Hermann von Helmholtz and the Foundations of Nineteenth-Century Science*, Berkeley (CA): University of California Press.

CANTÙ, PAOLA

1999 *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano: Unicopli.

CHIROLLET, JEAN-CLAUDE

1989 Le continu mathématique 'du troisième ordre' chez Henri Poincaré, in H. Barreau & J. Harthong (éd.), *La mathématique non standard*, Paris : CNRS Éditions, 83–116.

EHRLICH, PHILIP

2006 The Emergence of non-Archimedean Grössensysteme. The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception. Part I: the Emergence of non-Archimedean Grössensysteme. *Archive for History of Exact Sciences*, 60, 1–121.

FANO, GINO

1932 Geometrie non euclidee e non archimedee, in L. Berzolari, G. Vivanti & D. Gigli (eds.), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, Milano: Hoepli, II, 435–511.

FISHER, GORDON

1994 Veronese's Non-Archimedean Linear Continuum, in P. Ehrlich (ed.), *Real Numbers, Generalisation of the Reals and Theories of Continua*, Dordrecht: Kluwer, 107–145.

FREGUGLIA, PAOLO

1998 I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Giuseppe Veronese, in S. Coen (ed.), *Seminari di geometria 1996-1997*, Bologna: Università degli Studi di Bologna, Dipartimento di Matematica, 253–277.

FREUDENTHAL, HANS

1957 Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5, 105–142.

FRIEDMAN, MICHAEL & NORDMANN, ALFRED (EDS.)

2006 *The Kantian Legacy in Nineteenth-Century Science*, Cambridge (MA): MIT Press.

GALUZZI, MASSIMO

1980 Geometria algebrica e Logica tra Otto e Novecento, in G. Micheli (ed.), *Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento ad oggi, Annali della Storia d'Italia*, Torino: Einaudi, 1001–1105.

GAUSS, CARL FRIEDRICH

1830 Gauss an Bessel 9 avril 1830, in C.F. Gauss, *Werke*, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Leipzig: Teubner, 1900, VIII, 201.

GIEDYMIN, JERZY

1982 *Science and Convention: Essays on Henri Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition*, Oxford: Pergamon Press.

1991 Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation, *Studies in History and Philosophy of Science*, 22, 1–22.

GRASSMANN, HERMANN GÜNTHER

1844 *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert*, Leipzig: Wigand. Cité d'après H.G. Graßmann, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, I.1, 1894. Traduction française par Dominique Flament & Bernd Bekemeier, *La science de la grandeur extensive*, Paris : Blanchard, 1994.

GREFFE JEAN-LOUIS, HEINZMANN GERHARD & LORENZ KUNO (ÉD.)

1996 *Henri Poincaré : science et philosophie*. Actes du Congrès International 1994. Paris, Berlin : Blanchard / Akademie Verlag.

HATFIELD, GARY

1991 *The Natural and the Normative: Theories of Spatial Perception from Kant to Helmholtz*, Cambridge (MA): MIT-Press.

HEINZMANN, GERHARD

2001 The Foundations of Geometry and the Concept of Motion: Helmholtz and Poincaré, *Science in Context*, 14, 457–470.

HELMHOLTZ, HERMANN

1878 Die Tatsachen in der Wahrnehmung, Rede gehalten zur Stiftungsfeier der Friedrich-Wilhelms-Univ. zu Berlin am 3. August 1878, Berlin: Hirschwald, 1879. Cité d'aprés H. Helmholtz, *Vorträge und Reden*, Braunschweig: Vieweg & Sohn, 1884, 213–247.

1887 Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet, in *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Leipzig: Fues, 15–52.

1870 Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vortrag gehalten im Docentenverein zu Heidelberg, in H. Helmholtz, *Über Geometrie*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1968, 1–31.

1876 The Origin and Meaning of Geometrical Axioms, *Mind*, 1, 301–321. Cité d'après B. Ewald (ed.), *From Kant to Hilbert*, Oxford: Clarendon Press, II, 663–685.

HILBERT, DAVID

1899 *Grundlagen der Geometrie*, Stuttgart: Teubner.

1935 *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin: Springer.

HYDER, DAVID JALAL

1999 Helmholtz's Naturalized Conception of Geometry and his Spatial Theory of Signs, *Philosophy of Science*, 66, 273–286.

JAMMER, MAX

1954 *Concepts of Space: the History of Theories of Space in Physics*, Cambridge: Harvard University Press.

KLEIN, FELIX

1872 *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Antritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*, Erlangen: Deichert.

1890 Zur Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 37, 544–572. Cité d'aprés [Klein 1921-23, I, 353–383].

1893 On the Mathematical Character of Space-intuition and the Relation of Pure Mathematics to the Applied Sciences, in [Klein 1921-23, I, 225–231].

1898 Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anlässlich der ersten Vertheilung des Lobatschewsky Preises, *Bulletin Soc. Phys. Math. Kasan*, republié dans *Mathematische Annalen*, 50, 583–600. Cité d'après [Klein 1921-23, I, 384–401].

1921-23 *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, R. Fricke, A. Ostrowski, H. Vermeil & E. Bessel (eds.), Hagen and Berlin: Springer.

KOUNEIHER, J., FLAMENT, D., NABONNAND, P., SZCZECINIARZ, J.-J. (ÉD.)

2005 *Géométrie au vingtième siècle*, 1930-2000, Paris : Hermann.

MAGNANI, LORENZO

2001 *Philosophy and Geometry: Theoretical and Historical Issues*, Dordrecht: Kluwer.

MAGNANI, LORENZO (ED.)

1991 *Conoscenza e matematica*, Milano: Marcos Y Marcos.

MANARA, CARLO FELICE

1986 Giuseppe Veronese e il problema del continuo geometrico, *Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano*, 56, 99–111.

NABONNAND, PHILIPPE

2000 La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie, *Revue d'histoire des mathématiques*, 6, 219–269.

2005 Bibliographie des travaux sur l'œuvre de Poincaré (2001-2005), *Philosophia Scientiæ*, 9(1), 196–206.

Palatini, Francesco

1904 I principi della geometria esposti secondo il metodo del prof. Veronese, *Giornale di Matematiche*, 42, 149–185.

Palladino, Dario & Vallebona Marco

1987 L'infinitesimo fra storia e filosofia della matematica, *Epistemologia*, X, 55–74.

Poincaré, Henri

1916-56 *Œuvres*, Paris : Gauthier-Villars.

1887 Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 15, 203–216. Cité d'aprés [Poincaré, 1916-56, XI, 79–91].

1902a *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion.

1902b Les Fondements de la géométrie. Analyse et discussion de l'ouvrage de Hilbert : « Les fondaments de la Géometrie (Grundlagen der Geometrie) », *Bulletin des Sciences mathématiques*, (2), 26. Cité d'après [Poincaré, 1916-56, XI, 92–113].

1904 Rapport sur les travaux de M. Hilbert, *Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kazan*, 14, 10–48.

Richards, Joan L.

1977 The Evolution of Empiricism: Hermann von Helmholtz and the Foundations of Geometry, *The British Journal for the Philosophy of Science*, 28, 235–253.

1988 *Mathematical Visions: the Pursuit of Geometry in Victorian England*, San Diego (CA): Academic Press.

Russell, Bertrand

1897 *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge: At the University Press.

Salanskis, Jean-Michel & Sinaceur, Houria

1992 *Le labyrinthe du continu*, Colloque de Cerisy, Paris : Springer.

Segre, Corrado

1917 Commemorazione del Socio Nazionale Giuseppe Veronese, *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, Rendiconti, 26, II, 249–258.

Torretti, Roberto

1978 *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht: Reidel.

Veronese, Giuseppe

1882 Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projicirens und Schneidens, *Mathematische Annalen*, 19, 161–234.

1889 Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede, *Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, Atti della Classe di scienze naturali, fisiche e matematiche, Série 4, 6, 603–624.

1891 *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare.* Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica. Padova: Tipografia del Seminario.

1893-94 Osservazioni sui principii della geometria, *Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova*, 10, 195–216.

1895-97 *Elementi di Geometria*, ad uso dei licei e degli istituti tecnici (primo biennio), trattati con la collaborazione di P. Gazzaniga, Verona e Padova: Drucker.

1902 Les postulats de la Géométrie dans l'enseignement, *Compte Rendu du 2e Congrès international des mathématiciens* (Paris 1900), Paris : Gauthier-Villars, 433–450.

1905 La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 14, 347–351.

1906 *Il vero nella matematica.* Discorso inaugurale dell'anno scolastico 1905-1906 letto nell'Aula Magna della R. Università di Padova il giorno 6 novembre 1905, Roma: Forzani e C.

1909 La geometria non-Archimedea, in G. Castelnuovo (ed.), Atti del 4° Congresso internazionale dei Matematici (Roma 1908), Roma: Tipografia dell'Accademia dei Lincei, I, 197–208. Traduction française in *Bulletin des sciences mathématiques*, 33, 186–204.

Volkert, Klaus

1993 On Helmholtz's Paper 'Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie', *Historia Mathematica*, 20, 307–309.

Vuillemin, Jules

1972 Poincaré's Philosophy of Space, *Synthese*, 24, 161–178.

Walter, Scott

1997 La vérité en géométrie : sur le rejet de la doctrine conventionnaliste, *Philosophia Scientiæ*, 2(3), 103–135.